7.1 В чем принципиальное отличие исследования механики сплошной среды от изучения других объектов классической механики – материальной частицы, твердого тела?

Поскольку явления, рассматриваемые в гидродинамике, имеют макроскопический характер, то в гидродинамике жидкость рассматривается как сплошная среда. Это значит, что всякий малый элемент объема жидкости считается все-таки настолько большим, что содержит еще очень большое число молекул. Соответственно этому, когда мы будем говорить о бесконечно малых элементах объема, то всегда при этом будет подразумеваться «физически» бесконечно малый объем, т. е. объем, достаточно малый по сравнению с объемом тела, но большой по сравнению с межмолекулярными расстояниями. В таком же смысле надо понимать в гидродинамике выражения «жидкая частица», «точка жидкости». Если, например, говорят о смещении некоторой частицы жидкости, то при этом идет речь не о смещении отдельной молекулы, а о смещении целого элемента объема, содержащего много молекул, но рассматриваемого в гидродинамике как точка.

Математическое описание состояния движущейся жидкости осуществляется с помощью функций, определяющих распределение скорости жидкости v = v(x, y, z, t) и каких-либо ее двух термодинамических величин, например давления p(x, y, z, t) и плотности ρ(x, y, z, t). Как известно, все термодинамические величины определяются по значениям каких-либо двух из них с помощью уравнения состояния вещества; поэтому задание пяти величин: трех компонент скорости v, давления p и плотности ρ, полностью определяет состояние движущейся жидкости.

Все эти величины являются, вообще говоря, функциями координат x, y, z и времени t. Подчеркнем, что v(x, y, z, t) есть скорость жидкости в каждой данной точке x, y, z пространства в момент времени t, т. е. относится к определенным точкам пространства, а не к определенным частицам жидкости, передвигающимся со временем в пространстве; то же самое относится к величинам ρ, p.

7.2 Уравнение непрерывности

Полное количество жидкости, вытекающей в единицу времени из объема V_0 есть:

$$\oint \rho\vec{v}d\vec{f} \tag{7.2.1}$$

где интегрирование производится по всей замкнутой поверхности, охватывающей рассматриваемый объем.

С другой стороны, уменьшение количества жидкости в объеме V_0 можно написать в виде:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV \tag{7.2.2}$$

Приравнивая оба выражения и преобразуя интеграл по поверхности к интегралу по объему, получаем:

$$\int\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho\vec{v}\right)dV = 0 \tag{7.2.3}$$

Поскольку это равенство должно иметь место для любого объема, то должно быть равным нулю подынтегральное выражение, т. е.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho\vec{v} = 0 \tag{7.2.4}$$

Это —так называемое уравнение непрерывности.

Что означает это уравнение? Это такой закон сохранения массы. Если в какой-то точке меняется плотность (∂ρ/dt не 0), то из точки возникает отток, и интеграл по потоку скорости через поверхность, окружающую эту точку, не ноль. Дивергенция – это и есть этот интеграл при устремлении объёма, ограниченного поверхностью, к 0 (помните матан-3)?

Так что суть такова: плотность уменьшается => в точку должно поступить больше воды, чем вытечь => поток, т.е. дивергенция не 0. И наоборот.

7.3 Что такое стационарное течение жидкости?

Под стационарным (или установившимся) подразумевают такое течение, при котором в каждой точке пространства, занятого жидкостью, скорость течения остается постоянной во времени. Другими словами, v является функцией одних только координат, так что $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$.

7.4 Что такое идеальная жидкость?

Опр. Жидкость называется **идеальной**, если в процессе её движения несущественны процессы теплопроводности и вязкости. (Ландау Лифшиц)

Отсутствие теплообмена между отдельными участками жидкости (а также, конечно, и между жидкостью и соприкасающимися с нею окружающими телами) означает, что движение происходит адиабатически, причем адиабатически в каждом из участков жидкости. Таким образом, движение идеальной жидкости следует рассматривать как адиабатическое.

7.5 Что такое ламинарное течение?

Ламинарное течение — течение, при котором жидкость или газ перемещаются слоями без перемешивания и пульсаций (то есть без беспорядочных быстрых изменений скорости и давления). (Математическое описание? Может что-то типа $rot\vec{v} = 0$? Надо на конусльтации спросить)

Как нас учили Якута и Слепков на лекциях по механике? Течение бывает ламинарное и турбулентное.

Ламинарное течение – медленное течение. Давайте вспомним забег легкоатлетов по стадиону: каждый бежит вдоль своей дорожки. Так же и молекулы жидкости. Эти дорожки не обязательно прямые, но они есть и они не пересекаются. Т.е. две молекулы жидкости при ламинарном течении никогда не столкнутся.

Пример ламинарного течения – налейте суп в тарелку и начните вращать в тарелке ложку по окружности, центр которой совпадает с центром тарелки.

Турбулентное течение – это хаос и пурга.

Могу объяснить и так. При ламинарном течении соседние молекулы имеют в любой момент почти одинаковую скорость и движутся всё время рядом. Ну когда в супе водите ложкой по окружности, у вас соседние пузыри жира как соседствовали, так и путешествуют парой.

При турбулентном течении такого нет. Представим себе, что мы всем молекулам в начальный момент задали случайную скорость. Например, у нас N шариков-молекул, и мы программисты, задавшие им всем в начальный момент по три случайные проекции скорости. Естественно, соседи тут же разлетелись, а на каждый шарик может налететь другой, прилетевший непонятно откуда. Это турбулентное решение.

Пример: турбулентным является газ в обычных условиях. Ну вы характерные скорости молекул помните? Ого-го. И все они шатаются по комнате, сталкиваясь с друг другом.

7.6 Когда возможно применение приближения идеальной жидкости?

Если можно совершенно не учитывать процессов диссипации энергии, которые могут иметь место в текущей жидкости вследствие внутреннего трения (вязкости) в жидкости и теплообмена между различными ее участками.

7.7 Чем отличаются граничные условия для идеальной и вязкой жидкости?

Для идеальной жидкости свободные граничные условия, а вязкая жидкость должна "прилипать"к границе.

А вот далее Паша Демидов начинает рассказывать в вопросе 7.8 про интеграл Бернулли, ссылаясь на уравнение Эйлера, которое у него идёт сильно после (это у него вопрос 7.9)

Так что сначала – уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$$

Это и есть искомое уравнение движения жидкости, установленное впервые Л. Эйлером в 1755 г. Оно называется уравнением Эйлера и является одним из основных уравнений гидродинамики.

Если жидкость находится в поле тяжести, то на каждую единицу ее объема действует еще сила ρg, где g есть ускорение свободного падения. Эта сила должна быть прибавлена к правой части уравнения (7.7.3), так что (7.7.8) приобретает вид:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + g \qquad (7.9.9)$$

Паша тут стрелочку над g забыл, уравнение векторное.

Скорее всего, вам неинтересно, откуда оно получается (если интересно – откройте ориг Паши Демидова или https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнение_Эйлера). Вам надо просто запомнить эту формулу, чтобы написать её на экзамене.

Давайте обсудим, как её запомнить.

Во-первых, лучше избавиться от минуса, перенеся всё, кроме g, в одну часть:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = \vec{g}$$

Так проще запомнить – всё, кроме того ускорения свободного падения (если оно есть) с плюсом.

Как запомнить все три слагаемых?

Первое – ускорение. Тут всё понятно.

Третье – градиент давления. Временно верните его в правую часть со знаком минус. Это же 2 закон Ньютона: слева ускорение, а справа – сила, которая направлена вдоль градиента давления (градиент направлен в сторону наибольшего роста давления, а минус градиент как раз в сторону убывания давления, куда и будет направлено ускорение). ρ здесь для подгонки размерностей.

Второе слагаемое самое противное. Откуда вообще оно берётся? Дело в том, что под v(**r**, t) мы понимаем скорость воды в месте **r** в момент t. А первое слагаемое, ускорение, предполагает подсчёт производной по времени от

скорости по времени не v(**r**, t) в какой-то точке, а какого-то кусочка воды, который за время dt уже успел куда-то утечь, уступив старое место новому кусочку воды. Тем самым dv(**r**, t)/dt – это не совсем ускорение кусочка воды в точке **r**. Вот второе слагаемое эту проблему и фиксит.
Поэтому там только скорости. Я его запоминаю как «уву» ☺

Уравнение Эйлера справедливо для всех жидкостей. Мы сейчас будем рассматривать несколько частных случаев:

7.10 Несжимаемая жидкость

В очень многих случаях течения жидкостей (и газов) их плотность можно считать неизменяющейся, т. е. постоянной вдоль всего объема жидкости в течение всего времени движения. Другими словами, в этих случаях при движении не происходит заметных сжатий или расширений жидкости. О таком движении говорят как о движении несжимаемой жидкости.

Общие уравнения гидродинамики сильно упрощаются при применении их к несжимаемой жидкости. Правда, уравнение Эйлера не меняет своего вида, если положить в нем $\rho = \text{const}$, за исключением только того, что в уравнении можно внести р под знак градиента:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}\frac{p}{\rho} + \vec{g} \tag{7.10.1}$$

Зато уравнение непрерывности принимает при $\rho = \text{const}$ простой вид

$$div\vec{v} = 0 \tag{7.10.2}$$

Теперь что такое потенциал скорости?
Иногда удаётся ввести такую скалярную функцию φ, что **v** = grad φ.
Естественно, это успех: вместо векторной функции работать со скалярной!
Ну это как вместо **E** работать с φ.
Но такое возможно не всегда, а лишь для некоторых ситуаций.

2. Получите интеграл Бернулли для стационарного движения идеальной жидкости.

Сразу говорю, что здесь ловушка Джокера. Вот как он выглядит:

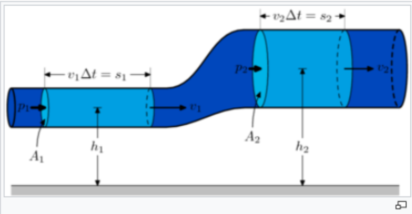
$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}.$$

Или, что то же самое

$$\frac{v^2}{2} + \quad gh + \frac{p}{\rho} = \text{const}.$$

Виной этому то, что теоретики любят называть интегралом неменяющиеся вещи (вспомните термин «интеграл движения»). Терминология неудачная, но что ж поделать.
Важно понимать, что константа в правой части не одна на весь объём воды, а одна на «линию» току, т.е. на траекторию молекулы-легкоатлета. На соседней «беговой дорожке» константа может быть уже другая.

Это уравнение Бернулли здорового человека, оно было на механике. Оно там даже доказывалось. Вот, например, из Википедии:



Элементарный вывод уравнения Бернулли из закона сохранения энергии приведён, например, в учебнике Д. В. Сивухина[13]. Рассматривается стационарное движение жидкости вдоль линии тока, изображённое на рисунке. Слева на объем жидкости, первоначально заключённый между двумя сечениями A_1 и A_2, действует сила $F_1 = p_1 A_1$, а справа — противоположного направления сила $F_2 = -p_2 A_2$. Скорость v и давление p в сечениях 1 и 2, а также их площади обозначены нижними индексами 1 и 2. За бесконечно малое время Δt левая граница этого объёма жидкости сместилась на малое расстояние $s_1 = v_1 \Delta t$, а правая — на расстояние $s_2 = v_2 \Delta t$. Работа, совершённая силами давления, равна:

$$W = F_1 s_1 + F_2 s_2 = \Delta t\,(v_1 A_1 p_1 - v_2 A_2 p_2).$$

В начале интервала времени Δt объем жидкости, заключённый между двумя поверхностями A_1 и A_2, состоит из левого голубого элемента и средней синей части, в конце этого интервала сместившийся объём состоит из средней синей части и правого голубого элемента. Так как течение стационарное, вклад синего фрагмента в энергию и массу обсуждаемого объёма жидкости не меняется, а сохранение массы позволяет заключить, что масса левого голубого элемента равна массе правого голубого элемента: $\Delta m = \Delta t v_1 A_1 \rho_1 = \Delta t v_2 A_2 \rho_2$. Поэтому работа сил, выражение для которой можно преобразовать к виду: $\Delta W = \Delta m \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right)$, равна изменению энергии, равному, в свою очередь, разности энергий правого голубого элемента ΔE_2 и левого голубого элемента ΔE_1.

Для несжимаемой жидкости можно, во-первых, в выражении для работы положить $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ и, во-вторых, в выражении для энергии элемента жидкости ограничиться кинетической и потенциальной энергией: $\Delta E_1 = \Delta m \left(\frac{v_1^2}{2} + g h_1\right)$, $\Delta E_2 = \Delta m \left(\frac{v_2^2}{2} + g h_2\right)$. После этого равенство $\Delta W = \Delta E_2 - \Delta E_1$ даёт: $p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$, или

$$p + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = \mathrm{const}.$$

Теперь давайте посмотрим на уравнение Бернулли, которое адаптировано под теормех 5-го семестра:

$\boxed{№6}$ Интеграл Бернулли.

Пусть

1) Жидкость идеальна, а её течение стационарно

2) Энтропия системы не меняется ($dS=0$)

3) Объемные силы потенциальны и стационарны

Тогда вдоль линии тока

$$\frac{v^2}{2} + w + U = P_0 = const, \text{ где}$$

(выводы в конце файла)

$w = e + \frac{P}{\rho}$ – удельная энтальпия

e – удельная внутр. энергия; ($V = \frac{1}{\rho}$ – уд. объем)

U – пот. $\underbrace{\text{внеш. сил}}_{\text{объемных}}$, т.е. $\vec{f} = -\vec{\nabla} U$

($\vec{f}$ – удельная объемная сила)

Казалось бы, новое уравнение, но если приглядеться, видно, что почти то же. Вылезшая ω – это сумма p/ρ (посмотрите – это слагаемое было и раньше!) и удельной внутренней энергии (в 1 семестре на механике мы считали её

постоянной вдоль всей линии, поэтому она была в константе). А u – это потенциал внешних сил, т.е. gh.
Так что уравнение тоже, просто с дополнительным слагаемым – удельной внутренеей энергии.

2. Интеграл Коши-Лагранжа для движения идеальной жидкости.
На этот раз требуется его только выписать.
Интеграл Коши-Лагранжа – обобщение интеграла Бернулли.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\operatorname{grad}^2\varphi}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t),$$

На самом деле он очень схож с интегралом Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + \quad gh + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

Градиент фи – это и есть скорость. Отличия тут разве что в том, что константа заменилась на f(t), плюс ещё добавилось новое слагаемое (самое левое). И то, и то содержит время, и не зря: интеграл К-Л, в отличие от Бернулли, как раз описывает нестационарные процессы.

2. Выведите уравнение баланса энергии для жидкости.
Ребята, это всё. Вот что пишет это на этот счёт Кузьменков

$$\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + v^\sigma\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\sigma}\right) + P^{\sigma\gamma}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial q^\sigma}{\partial x^\sigma} = W + W^{(\text{ext})}, \tag{70.12}$$

где

$$W(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta(\mathbf{r})}\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{N'} u_i^\sigma\frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_k|)}{\partial x_i^\sigma}\delta(\mathbf{r}+\boldsymbol{\xi}-\mathbf{r}_i(t))\,d^3\xi \tag{70.13}$$

— скалярная динамическая функция, представляющая собой мощность, развиваемую на скоростях теплового движения силами взаимодействия между частицами;

$$W^{(\text{ext})}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta(\mathbf{r})}\sum_{i=1}^{N} F_i^\alpha(\mathbf{r}_i,\mathbf{v}_i,t)u_i^\alpha\delta(\mathbf{r}+\boldsymbol{\xi}-\mathbf{r}_i(t))\,d^3\xi \tag{70.14}$$

— локальная мощность возможных внешних сил на скоростях теплового движения.

А что такое P, кстати?

Здесь $P^{\alpha\sigma}$ — тензорное поле кинетического давления (67.12),

Мда. Понятнее не стало.
Я не знаю, как это комментировать…

2. Вывод уравнения баланса импульса для жидкостей и газов

Я специально полностью приведу выкладки из Кузьменкова, чтобы вы… эх… ужаснулись ☺

1. Уравнения баланса импульса электронной и ионных компонент системы. Радиус действия кулоновских сил, как это следует из формулы Резерфорда для сечения рассеяния, является бесконечно большим. Это обстоятельство делает невозможным сведение плотности силы взаимодействия частиц к дивергенции тензора напряжения. Но общая формула (67.8) для этого силового поля останется справедливой, если пренебречь запаздыванием взаимодействий и считать U_{ik} равной потенциальной энергии кулоновых сил: $U_{ik} = e_i e_k G_{ik}$ $(G_{ik} = 1/t|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)$. Кроме того, формула (67.8) имеет место для гравитационных сил: $U_{ik} = -\gamma m_i m_k G_{ik}$. Таким образом, формулой (67.8) представлены плотности сил взаимодействия широкого класса физических систем.

В коллективных взаимодействиях с внешними электромагнитными полями (67.17) система заряженных частиц была представлена набором динамическими функций, определяющим распределение частиц: плотностью электрического заряда, электрического тока, дипольного момента и т. п. Теперь эти функции сами должны служить источниками силовых полей, суммируемых с внешними полями; уравнение баланса импульса в терминах

$$\Phi^\alpha = -\frac{1}{\Delta} \int\limits_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{N'} \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)}{\partial x_i^\alpha} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t))\, d^3\xi =$$

$$= -\frac{1}{\Delta} \int\limits_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{N'} \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_k|)}{\partial x^\alpha} \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t))\, d^3\xi =$$

$$= -\frac{1}{\Delta} \int dV' \int\limits_{\Delta(\mathbf{r})} d^3\xi \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{N'} \frac{\partial U_{ik}(|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha} \times$$

$$\times\, \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k(t)) =$$

$$= -\frac{1}{\Delta} \int dV' \int\limits_{\Delta(\mathbf{r})} d^3\xi \frac{\partial G(|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha} \times$$

$$\times \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{N'} \left[e_i \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) e_k \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k(t)) \right], \qquad (69.1)$$

где $G(|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}'|) = 1/|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}'|$.

Дальнейшие преобразования связаны с использованием формулы (65.13), согласно которой интеграл по всему пространству от динамической функции равен такому же интегралу от определенной на области $\Delta(\mathbf{r})$ полевой динамической функции. Используя эту формулу по отношению к переменным со штрихом, мы можем представить (69.1) в виде

$$\Phi^\alpha = -\frac{1}{\Delta^2} \int dV' \int\limits_{\Delta(\mathbf{r}')} d^3\xi' \int\limits_{\Delta(\mathbf{r})} d^3\xi \frac{\partial G(|\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}' - \boldsymbol{\xi}'|)}{\partial x^\alpha} \times$$

$$\times \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{N'} \left[e_i \delta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}_i(t)) e_k \delta(\mathbf{r}' + \boldsymbol{\xi}' - \mathbf{r}_k(t)) \right]. \qquad (69.2)$$

Формула (69.2) выражает силу, действующую на частицы в их собственном поле. Предполагая, что коллективные поля, так же как и внешние силовые поля в (67.17), меняются медленно на масштабах физически бесконечно малого объема, мы можем представить $\partial G(|\mathbf{r}+\boldsymbol{\xi}-\mathbf{r}'-\boldsymbol{\xi}'|)/\partial x^\alpha$ в виде разложения по степеням $(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}')^\sigma$ и ограничиться слагаемыми с производными функции G не слишком высокого порядка. Принимая во внимание только третий порядок малости, получим

$$\Phi^\alpha = -\frac{1}{\Delta^2}\int dV' \int\limits_{\Delta(\mathbf{r}')} d^3\xi' \int\limits_{\Delta(\mathbf{r})} d^3\xi \left\{ \frac{\partial G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu}(\xi^\mu - \xi'^\mu) + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu}(\xi^\mu - \xi'^\mu)(\xi^\nu - \xi'^\nu) + \cdots \right\} \times$$

$$\times \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{N'} \left[e_i \delta(\mathbf{r}+\boldsymbol{\xi}-\mathbf{r}_i(t)) e_k \delta(\mathbf{r}'+\boldsymbol{\xi}'-\mathbf{r}_k(t)) \right] =$$

$$= -\rho(\mathbf{r},t)\int dV' \frac{\partial G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha}\rho(\mathbf{r}',t) + \rho(\mathbf{r},t)\int dV' \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} \times$$

$$\times d^\mu(\mathbf{r}',t) - d^\mu(\mathbf{r},t)\int dV' \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu}\rho(\mathbf{r}',t) - \frac{1}{2}q^{\mu\nu}(\mathbf{r},t)\int dV' \times$$

$$\times \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu}\rho(\mathbf{r}',t) + \frac{1}{2}d^\nu(\mathbf{r},t)\int dV' \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu} d^\mu(\mathbf{r}',t) +$$

$$+ \frac{1}{2}d^\mu(\mathbf{r},t)\int dV' \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu} d^\nu(\mathbf{r}',t) - \frac{1}{2}\rho(\mathbf{r},t)\int dV' \times$$

$$\times \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu} q^{\mu\nu}(\mathbf{r}',t) + \cdots. \tag{69.3}$$

Здесь $\rho(\mathbf{r},t)$ — плотность электрического заряда;

$$q^{\mu\nu}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^{N} e_i \xi_i^\mu \xi_i^\nu \delta\big(\mathbf{r}+\boldsymbol{\xi}-\mathbf{r}_i(t)\big)\, d^3\xi$$

— тензорное поле локальных квадрупольных моментов, определяющее (наряду с плотностью заряда и полем дипольных моментов) распределение частиц системы.

Сгруппируем в (69.3) слагаемые, содержащие ρ, d^μ, $q^{\mu\nu}$. Тогда получим

$$\Phi^\alpha = \rho\left\{ -\int dV' \frac{\partial G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha}\rho(\mathbf{r}',t) + \int dV' \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} d^\mu(\mathbf{r}',t) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int dV' \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu} q^{\mu\nu}(\mathbf{r}',t) + \cdots \right\} +$$

$$+ d^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{ -\int dV' \frac{\partial G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha}\rho(\mathbf{r}',t) + \right.$$

$$\left. + \int dV' \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} d^\mu(\mathbf{r}',t) - \cdots \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}q^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\left\{ -\int dV' \frac{\partial G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha}\rho(\mathbf{r}',t) + \cdots \right\}. \tag{69.4}$$

Как легко видеть, выражения во всех трех фигурных скобках совпадают и множителями при них служат составляющие оператора

$$\hat{\rho} = \rho(\mathbf{r},t) + d^\mu(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2}q^{\mu\nu}(\mathbf{r},t)\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \cdots. \tag{69.5}$$

Первое слагаемое в фигурных скобках представляет собой электрическое поле, созданное распределением заряда $\rho(\mathbf{r},t)$. Преобразуем второе слагаемое:

$$\int dV' \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} d^\mu(\mathbf{r}',t) = -\int dV' \frac{\partial^2 G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x'^\mu} d^\mu(\mathbf{r}',t) =$$

$$= -\int dV' \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\left[\frac{\partial G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha} d^\mu(\mathbf{r}',t) \right] + \int dV' \frac{\partial G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha}\frac{\partial d^\mu(\mathbf{r}',t)}{\partial x'^\mu}.$$

Интеграл по объему от дивергенции тензорного поля преобразуется в интеграл по бесконечно удаленной поверхности и обращается в нуль, так как частиц на бесконечности нет. Остается слагаемое, представляющее собой электрическое поле, источником которого служит дивергенция плотности дипольного момента.

Третье слагаемое в фигурных скобках преобразуется аналогично и представляет собой составляющую электрического поля, источником которой служит дивергенция вектора $\partial q^{\mu\nu}/\partial x^\nu$. Этот вектор при помощи операции дивергенции (по одному из тензорных индексов) связан с плотностью тензора квадрупольного момента $q^{\mu\nu}$:

$$-\frac{1}{2}\int dV' \frac{\partial^3 G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu \partial x^\nu} q^{\mu\nu}(\mathbf{r}',t) = -\frac{1}{2}\int dV' \frac{\partial G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 q^{\mu\nu}(\mathbf{r}',t)}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}.$$

Таким образом, плотность силы взаимодействия $\Phi^\alpha(\mathbf{r},t)$ частиц с собственным кулоновским полем $E^\alpha(\mathbf{r},t)$ имеет вид

$$\Phi^\alpha(\mathbf{r},t) = \rho_{(e)}(\mathbf{r},t)E^\alpha(\mathbf{r},t) + d^\beta(\mathbf{r},t)\frac{\partial E^\alpha(\mathbf{r},t)}{\partial x^\beta} + \\ + \frac{1}{2}q^{\mu\nu}(\mathbf{r},t)\frac{\partial^2 E^\alpha(\mathbf{r},t)}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\ldots, \quad (69.6)$$

где

$$E^\alpha(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\int dV' G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \times \\ \times \left[\rho_{(e)}(\mathbf{r}',t) - \frac{\partial d^\mu(\mathbf{r}',t)}{\partial x'^\mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q^{\mu\nu}(\mathbf{r}',t)}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} + \cdots\right]. \quad (69.7)$$

Так как

$$\frac{\partial^2 G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \quad (69.8)$$

формулу (69.7) можно представить в дифференциальной форме. Вычисляя дивергенцию поля (69.7), используя формулу (69.8) и интегрируя результат по переменным со штрихом, приходим к уравнению электрического поля:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\left[\rho_{(e)}(\mathbf{r},t) - \frac{\partial d^\mu(\mathbf{r},t)}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q^{\mu\nu}(\mathbf{r},t)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \cdots\right]. \quad (69.9)$$

Выражение для силового поля $\Phi^\alpha(\mathbf{r},t)$ можно представить также в виде

$$\Phi^\alpha(\mathbf{r},t) = \widehat{\rho}_{(e)}(\mathbf{r},t)E^\alpha(\mathbf{r},t), \quad (69.10)$$

где $E^\alpha(\mathbf{r},t)$ удовлетворяет уравнению (69.9).

Уравнение баланса импульса системы частиц с кулоновским взаимодействием получается теперь путем подстановки выражений (69.6), (69.7), (67.17) в уравнение баланса импульса общего вида (67.21). Получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(m)}v^\alpha) + \frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\rho_{(m)}v^\alpha v^\sigma + P^{\alpha\sigma}) = \rho_{(m)}G^\alpha(\mathbf{r},t) + \\ + c^\beta(\mathbf{r},t)\frac{\partial G^\alpha(\mathbf{r},t)}{\partial x^\beta} + \rho_{(e)}(\mathbf{r},t)\left[E^\alpha(\mathbf{r},t) + E^\alpha_{(ext)}(\mathbf{r},t)\right] + \\ + d^\beta(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[E^\alpha(\mathbf{r},t) + E^\alpha_{(\mathrm{ext})}(\mathbf{r},t)\right] + \\ + \frac{1}{2}q^{\mu\nu}(\mathbf{r},t)\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\left[E^\alpha(\mathbf{r},t) + E^\alpha_{(\mathrm{ext})}(\mathbf{r},t)\right] + \\ + \frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}j^\beta_{(e)}(\mathbf{r},t)B^\gamma_{(\mathrm{ext})}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial B^\gamma_{(\mathrm{ext})}(\mathbf{r},t)}{\partial x^\mu}d^{\beta,\mu}(\mathbf{r},t), \quad (69.11)$$

Это и есть искомое уравнение.

АА